Université Catholique de Louvain

Département d'Administration et de Gestion

Rapport de Stage :
Evaluation d'un traité Stop Loss financier
Société : Sécura-Re Belgium

Responsable de stage : M. Philippe de Longueville

Rapporteur externe : M. Pierre Devolder.

Année 2000-2001

Barbarin Jérôme

ACTU 3DS

Introduction.

L’objectif de ce stage est d’évaluer un traité de réassurance de type stop loss dont la spécificité réside dans le fait que les prestations dues, dépendent de l’évolution de certains actifs financiers. Plus précisément, le loss ratio de ce traité dépend de l’évolution de certains indices financiers. L’évolution globale de ces actifs est sensée être représentative de l’évolution du portefeuille financier de la cédante. Nous verrons qu’un tel traité stop loss n’a plus l’objectif, comme dans le cas d’un traité classique, de fixer une borne à la sinistralité de la cédante mais plutôt de protéger le résultat de la cédante.

Ce rapport de stage est organisé de la manière suivante. Dans la première partie, nous décrirons le traité en question et verrons en quoi il diffère d’un traité stop-loss classique. Nous exposerons les hypothèses fondamentales sur lesquelles reposent les modèles utilisés dans la suite. De ces hypothèses fondamentales, nous déduirons le principe général d’évaluation. Dans la deuxième partie, nous décrirons les différents modèles utilisés. Dans la troisième partie, nous verrons comment nous avons estimé les paramètres des différents modèles. La quatrième partie décrira les méthodes numériques utilisées pour calculer le prix de ce traité. Enfin, dans la cinquième et dernière partie, nous présenterons les résultats auxquels nous avons aboutis.

Partie 1.

Préliminaires.

1. Description du traité.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, ce traité tient compte de certaines composantes financières dans la détermination des prestations dues par la compagnie de réassurance. Plus particulièrement, le loss ratio du traité Stop loss est fonction de l'évolution de la valeur de deux indices, l'indice Dow Jones Euro Stoxx 50 et l'indice Standards and Poors 500, ainsi que d'une obligation couponnée émise par le gouvernement danois. Cette obligation couponnée paye un coupon annuel de 6% et atteint sa maturité à la date du 15 novembre 2009.
Formellement, le loss ratio de ce traité suit la forme suivante :

$$LR(tf) = \frac{S(tf)}{P} + 0.00105 * \left(Z_1(td) - Z_1(tf)\right) + 0.000106 * \left(Z_2(td) - Z_2(tf)\right) + 0.005 * \left(IB(td) - IB(tf)\right) \text{ où}$$

Z1(t) est la valeur de l'indice Dow Jones Euro Stoxx 50 à la date t, Z2(t) la valeur de l'indice S&P500 en t et IB(t) la valeur de l'obligation couponnée de référence en t.
td est la date de début d'exercice du traité et tf la date de fin d'exercice de ce traité.
Notons que la date de début du traité, td, ne coincide pas avec la date de conclusion tc de ce traité (supposée être la date de paiement du prix du traité), les valeurs des différents actifs financiers en td sont donc également des variables aléatoires. Par conséquent, le montant des prestations à payer, a un caractère "path dependent".
La forme exacte des prestations à la maturité du traité est donnée par la formule :

$$\Pr estations(tf) = Min\left[75000000; \max\left[0; \Pr ime * LR(tf) - \max\left[\Pr ime * 84\%; 895000000\right]\right]\right]$$

Dans le cas d'un traité stop loss classique, cette formule se traduirait par le fait que les prestations du réassureur correspondent au montant des sinistres dépassant 84% des primes ou dépassant 895 000 000 DK, tout en limitant ses prestations à un maximum de 75 000 000 DK.

Dans le cas étudié, le LR est influencé par l'évolution du prix des actifs financiers sur la période d'exercice du traité. Il évolue de manière inverse aux actifs financiers. Si ceux-ci évoluent positivement, le loss ratio diminue, le réassureur intervient donc moins qu'il ne l'aurait fait dans le cas d'un traité classique à sinistralité équivalente. Inversément, si les actifs financiers évoluent négativement, le loss ratio augmente et le réassureur voit ses prestations augmenter par rapport au traité classique. Si on suppose que l'évolution de la valeur du portefeuille financier de la société est fortement corrélée à

$$0.00105 * \left(Z_1(td) - Z_1(tf)\right) + 0.000106 * \left(Z_2(td) - Z_2(tf)\right) + 0.005 * \left(IB(td) - IB(tf)\right)$$

alors on se rend compte que les prestations du réassureur diminuent quand les résultats financiers de la cédante sont positifs et augmentent quand les résultats financiers sont négatifs. Ce traité de réassurance permet donc de protéger le résultat de la cédante.

Si considère que ce portefeuille est composé de ces trois seuls actifs, on peut déduire de ces coefficients la composition implicite du portefeuille. Cette composition est donnée par le produit de ces coefficients et de la valeur initiale des actifs. A titre indicatif nous avons calculé cette composition pour des valeurs initiales prises à la date du 20 avril 2001. A cette date, l'Euro Stoxx et le S&P500 valaient respectivement 333.21 et 1242.98. On a donc respectivement les proportions suivantes : 333.21*0.00105=34.98 % et 1242.98*0.000106=13.17%. Le solde correspond à la proportion prise par l'obligation dans le portefeuille, c'est à dire 51.85%. Notons que ces proportions ne sont données qu'à titre indicatif puisque les coefficients réels ont été déterminés à une date antérieure et donc à partir des valeurs initiales différentes.

Enfin, notons que ce traité est destiné à une société d'assurance danoise et qu'il est exprimé en couronnes danoises.

2. Principes généraux d'évaluation et hypothèses fondamentales.

En vue d'évaluer le traité considéré, nous nous situons dans le cadre, largement utilisé en finance, de l'évaluation risque neutre. Ce principe peut s'énoncer à l'aide des deux théorèmes fondamentaux de l'évaluation d'actifs :

Théorème 1 : Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sur le marché si et seulement s'il existe une mesure de probabilité Q équivalente à la mesure réelle P, telle que les prix de tous les actifs atteignables actualisés au taux sans risque suivent des martingales.
Théorème 2 : Tout actif est atteignable si et seulement si le marché est complet.
Ce principe nous indique que le prix en t, X(t), de tout actif atteignable X versant un payoff en T, est donné par la formule suivante :

$$X(t) = E^Q\left[X(T) * \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \Im_t \right]$$

où B(t) est la valeur à la date t d'un actif croissant au taux sans risque.
Nous allons utiliser ce principe pour évaluer notre traité de réassurance. En reprenant notre formule de prestations, nous avons alors la formule générale de pricing de notre traité :

$$P(tc) = E^Q\left\{ \min\left[75M ; \max\left[0, P * \begin{bmatrix} \frac{S}{P} \\ + 0.00105 * \left(Z_1(td) - Z_1(tf)\right) \\ + 0.000106 * \left(Z_2(td) - Z_2(tf)\right) \\ + 0.005 * \left(IB(td) - IB(tf)\right) \end{bmatrix} - \max\left[p * 0.84 ; 895M\right] \right]\right] * \frac{B(t)}{B(T)} \right\}$$

Quatre remarques importantes sont à faire à ce niveau. Premièrement, l'évaluation risque neutre suppose un modèle de marché où il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. Deuxièmement, en utilisant le principe de l'évaluation risque neutre, nous supposons implicitement que ce payoff est atteignable. Autrement dit, nous supposons qu'il est possible de construire un portefeuille auto-financé qui réplique exactement et de manière certaine le payoff final du traité. A partir du moment où le risque lié à la sinistralité de la cédante n'est pas échangé sur les marchés financiers (ni sur un autre), on peut raisonnablement penser qu'il doit exister une forme d'incomplétude des marchés. L'hypothèse d'atteignabilité est donc évidemment assez discutable. Cependant nous l'admettons remplie de manière à pouvoir utiliser le principe d'évaluation risque neutre. Troisièmement, nous supposerons que la distribution du ratio S/P n'est pas modifiée par le changement de mesure. Nous gardons donc la distribution réelle pour S/P. Autrement dit, nous supposons que les agents qui peuplent notre modèle de marché n'exigent aucune prime de risque comme rémunération pour supporter ce risque. Par conséquent, ils sont neutres au risque vis à vis de ce risque. Une manière d'expliquer cette neutralité au risque est de supposer que ces agents ont la possibilité de diversifier parfaitement ce risque.au sens de Markowitz.

3. Spécificité du traité et choix de la méthode numérique.

La recherche d'une solution explicite du prix d'un tel actif semble extrêmement complexe. Premièrement, le payoff en T fait intervenir le prix de plusieurs actifs non indépendants. Deuxièmement, ces actifs sont liés à des économies différentes et sont donc exprimés dans des devises différentes. Troisièmement, comme nous l'avons déjà fait remarquer, ce payoff est «path-dependent». En effet, le payoff dépend des prix des actifs Z_1, Z_2 et IB à la date td, antérieur à la date de maturité tf, et à la date tf. Ces prix en td sont, bien entendu, des v.a. par rapport à l'information détenue en tc. Ces particularités rendent l'évaluation très ardue.

Vu la complexité de la formule de pricing, nous avons opté pour une résolution par une méthode numérique. La méthode numérique choisie est la méthode de Monte-Carlo. Elle nous semble la plus pertinente à utiliser dans le cas qui nous occupe. En effet, d'une part, la variable aléatoire S/P ne nous permet pas d'utiliser une méthode numérique visant à résoudre l'équation différentielle dont le prix du traité serait solution. D'autre part, le caractère "path dependent" et le nombre relativement élevé de processus à modéliser ne favorisent pas non plus l'utilisation de technique du type arbre binomial, trinomial,…

Dans la suite, nous étudierons en fait deux méthodes de Monte Carlo. On peut déjà noter que l'une de celles-ci se basera sur une approximation d'Euler des processus de diffusion décrivant les prix des différents actifs.

Partie 2.

Les différents Modèles.

Nous décrirons deux modèles. Ils se distinguent par un unique élément. Le premier modèle suppose que tous les actifs sont exprimés dans la même devise, à savoir la couronne danoise. Cette hypothèse est évidemment très simplificatrice et ne reflète pas la réalité. Cependant elle a l'avantage d'éviter la modélisation de plusieurs courbes des taux, des taux de change ainsi que l'estimation de l'ensemble des covariances des différents processus (taux d'intérêt, taux de change, indices). De plus, elle permet d'accélérer les procédures numériques. Ce modèle sera appelé modèle à devise unique. Par opposition, le second type modélise explicitement les différentes devises. Dans ce cas, outre les courbes des taux, il nous faudra également estimer les volatilités des taux de change. Ce modèle a l'avantage de traduire plus fidèlement la réalité. Cependant, il est évident que le nombre de paramètres à estimer croît très sensiblement. Ce modèle sera appelé modèle à devises multiples.

1. Modèle de Vasicek à devise unique.

a) Description du modèle de marché.

Comme nous venons de le faire remarquer, nous faisons l'hypothèse, dans ce modèle, que tous les actifs sont exprimés dans une seule et même devise, la couronne danoise. Formellement, le modèle de marché utilisé est le suivant :

Il existe un actif sans risque noté B(t) tel que $dB(t) = r(t) * B(t) * dt$. Cet actif sans risque correspond à ce qu'on appelle dans la littérature un “money market account”. La valeur de cet actif croît au taux court terme instantané r(t) supposé aléatoire.

Il existe également deux actifs risqués notés Z1 (= Indice Dow Jones EuroStoxx 50) et Z2 (=SP500). Nous avons supposé qu'aucun de ces indices ne versait de dividendes[1]. De plus, conformément au modèle classique de Black and Scholes, nous prenons comme hypothèse que les processus suivis par ces indices sont des mouvements browniens géométriques. Cependant, par rapport à ce modèle de Black and Scholes, nous supposons que l'incertitude du marché est générée par un mouvement brownien à 3 dimensions :

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) & W_2(t) & W_3(t) \end{pmatrix}^T.$$

Les processus suivis par les indices, sous la mesure risque neutre, sont alors les suivants :

$$dZ_1(t) = Z_1(t) * \left[r(t) * dt + \sum_{i=1}^{3} \sigma_{1i} * dW_i(t) \right]$$

$$dZ_2(t) = Z_2(t) * \left[r(t) * dt + \sum_{i=1}^{3} \sigma_{2i} * dW_i(t) \right]$$

On suppose les σ_{ij} constants.

Enfin, nous supposons, selon l'approche développée par Vasicek, que le taux d'intérêt instantané sans risque suit, sous la mesure risque neutre, le modèle suivant :

$$dr(t) = a * (b - r(t))dt + \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ri} * dW_i(t)$$

Notons que sous la mesure risque neutre, les indices vont croître au même taux instantané égal au taux d'intéret instantané sans risque r(t). Ce taux est lié à l'économie danoise.

b) Preuve de l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Si on peut démontrer que sous cette mesure les prix des actifs actualisés au taux sans risque suivent des martingale, alors nous auront prouvé que ce modèle de marché est bien sans opportunité d'arbitrage.

La valeur de l'actif sans risque en T est égale à

$$B(T) = B(t) * \exp\left(\int_{u=t}^{T} r(u) du \right).$$

[1] Notons qu'il sera possible de modifier le modèle de manière très simple afin de tenir compte d'éventuels dividendes versés.

En ce qui concerne les actifs risqués, une application du lemme d'Ito fournit le résultat suivant :

$$Z_1(T) = Z_1(t) * \exp\left(\int_{u=t}^{T} r(t) - \frac{1}{2} * |\sigma_1|^2 \, du + \int_{u=t}^{T} \sigma_1 * dW(u) \right)$$

$$où \quad \sigma_1 = (\sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13})$$

$$et \quad |\sigma_1|^2 = \sigma_1 * \sigma_1^T = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{1i}^2$$

On a donc comme prix actualisés des actifs :

1. $\frac{B(T)}{B(T)} = 1$ ce qui est évidemment une martingale.

2. $\frac{Z_1(T)}{B(T)}$ pour lequel, on a

$$\begin{aligned}
\frac{Z_1(T)}{B(T)} &= \frac{Z_1(t)}{B(t)} * \exp\left(\int_{u=t}^{T} r(t) - \frac{1}{2} * |\sigma_1|^2 - r(t) dt + \int_{u=t}^{T} \sigma_1 dW(u) \right) \\
&= \frac{Z_1(t)}{B(t)} * \exp\left(\int_{u=t}^{T} -\frac{1}{2} * |\sigma_1|^2 dt + \int_{u=t}^{T} \sigma_1 dW(u) \right) \\
&= \frac{Z_1(t)}{B(t)} * \exp\left(-\frac{1}{2} * |\sigma_1|^2 (T-t) + \sigma_1 * (W(T) - W(t)) \right)
\end{aligned}$$

Pour prouver que $\frac{Z_1(T)}{B(T)}$ est une martingale, il suffit de démontrer que

$$E\left[\frac{Z_1(T)}{B(T)} | \Im_t \right] = \frac{Z_1(t)}{B(t)}.$$

C'est bien le cas puisque nous avons :

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{Z_1(T)}{B(T)} | \Im_t \right] &= E\left[\frac{Z_1(t)}{B(t)} \exp\left(-\frac{1}{2} * |\sigma_1|^2 (T-t) + \sigma_1 * (W(T) - W(t)) \right) | \Im_t \right] \\
&= \frac{Z_1(t)}{B(t)} E\left[\exp\left(-\frac{1}{2} * |\sigma_1|^2 (T-t) + \sigma_1 * (W(T) - W(t)) \right) | \Im_t \right] \\
&= \frac{Z_1(t)}{B(t)} E\left[\exp\left(-\frac{1}{2} * |\sigma_1|^2 (T-t) + \sigma_1 * (W(T) - W(t)) \right) \right] \\
&= \frac{Z_1(t)}{B(t)} E[\exp(L)] \quad \text{où L} \sim \mathrm{N}\left[-\frac{1}{2} |\sigma_1|^2 (T-t); |\sigma_1|^2 (T-t) \right] \\
&= \frac{Z_1(t)}{B(t)} \exp\left(-\frac{1}{2} |\sigma_1|^2 (T-t) + \frac{1}{2} |\sigma_1|^2 (T-t) \right) = \frac{Z_1(t)}{B(t)} \exp(0) \\
&= \frac{Z_1(t)}{B(t)}
\end{aligned}$$

On peut faire de même pour Z_2.

Autrement dit, nous venons de montrer que sous cette mesure, tous les prix actualisés des actifs de base sont martingales. Grâce au premier théorème fondamental de l'évaluation d'actif, nous pouvons en déduire que notre modèle de marché est sans opportunité d'arbitrage.

Par le principe de l'évaluation risque neutre, nous pouvons en déduire également que le prix de tout actif atteignable peut se calculer comme l'espérance sous cette mesure risque neutre des payoffs actualisés au taux sans risque. Donc pour tout actif X versant un payoff X(T) en T, son prix est :

$$X(t) = E^Q\left[X(T) * \exp\left(- \int_{u=t}^{T} r(u)du \right) \middle| \Im_t \right]$$

On peut ainsi calculer le prix B(t,T) d'une obligation zéro-coupon de maturité T.

$$B(t,T) = E^Q\left[1 * \exp\left(- \int_{u=t}^{T} r(u)du \right) \middle| \Im_t \right]$$

Pour le modèle de Vasicek, cette espérance peut s'écrire sous forme explicite. Le prix d'une obligation zéro coupon est alors donné par :

$$B(t,T) = \exp\left[- A(T-t) - B(T-t)r(t)\right]$$

$$\text{où} \quad \begin{aligned} B(T-t) &= \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \\ A(T-t) &= \left(T - t - B(T-t)\right)b - 0.5v(T-t) \\ v(T-t) &= \frac{|\sigma_r|^2}{2a^3}\left(4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} + 2a(T-t) - 3\right) \end{aligned}$$

c) Distribution du taux d'intérêt sous l'hypothèse de Vasicek.

L'expression de la distribution de r(t) nous servira dans la suite de ce rapport lorsque nous étudierons les simulations de Monte Carlo. Nous la donnons dés à présent.

Si le processus suivi par r sous Q est un processus de Ornstein-Ulhenbeck tel que décrit ci-dessous

$$dr(t) = a * \left(b - r(t)\right)dt + \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ri} * dW_i(t)$$

alors la distribution de r(t) conditionnellement à l'information en s est donnée par l'équation suivante :

$$r(t)\Big|\Im_s = e^{-a(t-s)}r(s) + b\left(1 - e^{-a^*(t-s)}\right) + e^{-at}\sum_{i=1}^{3}\int_{u=s}^{t} e^{au}\sigma_{ri}dW_i(u)$$

Puisque que le terme de l'intégrale stochastique est déterministe, nous sommes devant un processus Gaussien. Autrement dit, $r(t)\big|\Im_s \sim Normale$ de moyenne :

$$e^{-a(t-s)}r(s) + b\left(1 - e^{-a^*(t-s)}\right)$$

Et de variance :

$$E\left[\left(\int_{u=t}^{T} e^{-a(t-u)}\sigma_r du\right)\left(\int_{u=t}^{T} e^{-a(t-u)}\sigma_r du\right)^T\right] = \int_{u=t}^{T} e^{-2a(t-u)}\sigma_r\sigma_r^T du$$

$$= \frac{\left|\sigma_r\right|^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right)$$

2. Modèle de Vasicek à devises multiples.

Nous allons dans ce modèle essayer d'éliminer la critique la plus évidente du modèle précédent, à savoir que nous n'avons pas tenu compte du fait que les trois actifs financiers, les deux indices et l'obligation couponnée, étaient exprimés dans 3 devises différentes. Par conséquent, nous allons devoir créer un modèle de marché avec des multiples structures par terme de taux d'intérêt, une pour chaque devise.

Nous optons ici pour un modèle où les courbes des taux sont modélisées par l'approche du taux court terme instantané. Chacune des trois courbes a donc son propre taux d'intérêt court terme et ceux-ci suivent tous des processus continus d'Ornstein-Ulhenbeck mais avec des paramètres différents.

Dans ce type de modèle à devises multiples, il faut principalement noter deux particularités qui n'apparaissent pas dans les modèles à une seule devise. Premièrement, nous allons voir qu'il faut tenir compte des processus suivis par les taux de change même si, comme c'est le cas ici, le taux de change n'apparaît pas dans le payoff final du traité. Par conséquent, il nous faudra choisir, spécifier les processus de diffusion suivis par les différents taux de change. Plus précisément, nous verrons qu'en fait, seule la volatilité de ces processus doivent être spécifiés. Deuxièmement, il existe maintenant une mesure risque neutre pour chaque économie, c'est à dire que nous nous situons dans un monde sans opportunités d'arbitrage si et seulement s'il existe au moins une mesure risque neutre dans chaque devise telle que le prix de tout actif exprimé dans cette devise et actualisé au taux de cette dernière est martingale sous la mesure risque neutre de cette même devise. En ce qui nous concerne, puisque notre traité est exprimé en couronne danoise, nous allons exprimer tous les autres processus sous la mesure martingale danoise. En effet, sous cette mesure tous les actifs (donc notre traité) actualisés au taux danois et exprimés en couronne danoise sont martingales. Notons bien que sous cette mesure les prix actualisés des autres actifs et exprimés dans une autre devise, ne seront pas martingales. Par exemple, le prix du SP500 exprimé en $ et actualisé (aussi bien au taux danois qu'au taux US) ne sera pas martingale sous la mesure risque neutre danoise. Cette mesure sera dans la suite également appelée la mesure de référence ou la mesure domestique.

a) Le modèle et les différentes mesures martingales.

Nous allons spécifier les processus suivis par les prix des différents actifs sous les mesures risque neutres liées à leurs économies. Nous verrons ensuite comment réécrire ces processus sous la mesure danoise.

- Sous la mesure risque neutre domestique, le taux court terme danois suit un le processus suivant :

  $$dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma_r dW(t)$$

  où a > 0, b >0 , σ_r est un vecteur à 7 dimensions et W(t) est un mouvement brownien standard multivarié à 7 dimensions. De plus on suppose qu'il existe un actif B(t) instantanément sans risque qui croît à un taux r(t).

- Sous la mesure risque neutre européenne, le prix de l'indice Euro Stoxx 50 et le taux d'intérêt court terme suivent les processus suivant :

  $$dZ_1(t) = Z_1(t)\big[r_1(t)dt + \sigma_1 dW^1(t)\big]$$
  $$dr_1(t) = a_1\big(b_1 - r_1(t)\big)dt + \sigma_{r1} dW^1(t)$$

  où a1 >0, b1>0, σ_1 est un vecteur à 7 dimensions et W^1(t) est un mouvement brownien standard multivarié à 7 dimensions. Il existe également un actif sans risque B_1(t) qui croît au taux r_1(t).

Notons que W(t) et $W^1(t)$ sont exprimés sous des mesures différentes. Notons également que sous la mesure risque neutre européenne, le prix de l'indice Euro Stoxx actualisé au taux européen est bien une martingale. L'économie européenne prise isolément est donc bien sans opportunité d'arbitrage.

- Sous la mesure risque neutre américaine, le prix de l'indice SP500 et le taux court terme américain sont donnés par des processus similaires :

$$dZ_2(t) = Z_2(t)\left[r_2(t)dt + \sigma_2 dW^2(t)\right]$$
$$dr_2(t) = a_2\left(b_2 - r_2(t)\right)dt + \sigma_{r2}dW^2(t)$$

De même que pour les autres pays, on suppose qu'il existe un actif sans risque $B_2(t)$. Prise isolément, l'économie américaine est donc aussi sans opportunité d'arbitrage.

Il nous reste maintenant à poser les conditions nécessaires pour que notre de modèle de marché soit également sans opportunité d'arbitrage dans son ensemble, c'est à dire qu'il n'existe pas d'arbitrage possible entre les différentes économies. Ceci va se faire à travers les processus des taux de change.

<u>*Proposition 1 :*</u> Le modèle de marché est sans opportunité d'arbitrage si les taux de change suivent les processus suivants :
Soit Q_1 le taux de change DK/Euro et Q_2 le taux DK/\$US. Sous la mesure risque neutre domestique, les taux de change, de volatilités $\upsilon_1(t)$ et $\upsilon_2(t)$, suivent les processus :

$$dQ_1(t) = Q_1\left[\left(r(t) - r_1(t)\right)dt + \upsilon_1(t)dW(t)\right]$$
$$dQ_2(t) = Q_2\left[\left(r(t) - r_2(t)\right)dt + \upsilon_2(t)dW(t)\right]$$

Notons que dans la suite, nous ferons l'hypothèse que les volatilités sont constantes υ_1 et υ_2. Ces formules sont cependant valables pour des volatilités quelconques.

<u>*Proposition 2 :*</u>

En appliquant le théorème de girsanov, W(t) défini par $dW(t) = dW^i(t) + \upsilon_i^T dt$ est un mouvement brownien sous la mesure de référence. On peut alors utiliser cette équation pour passer d'une mesure à l'autre.

On a donc sous la mesure de référence, les processus suivants :

$$
\begin{aligned}
dZ_1(t) &= Z_1(t)\left[\left(r_1(t) - \sigma_1\upsilon_1^T\right)dt + \sigma_1 dW(t)\right] \\
dr_1(t) &= a_1\left(b_1 - \sigma_{r1}\upsilon_1^T - r_1(t)\right)dt + \sigma_{r1}dW(t) \\
dZ_2(t) &= Z_2(t)\left[\left(r_2(t) - \sigma_2\upsilon_2^T\right)dt + \sigma_2 dW(t)\right] \\
dr_2(t) &= a_2\left(b_2 - \sigma_{r2}\upsilon_2^T - r_2(t)\right)dt + \sigma_{r2}dW(t) \\
dr(t) &= a\left(b - r(t)\right)dt + \sigma_r dW(t) \\
dQ_1(t) &= Q_1\left[\left(r(t) - r_1(t)\right)dt + \upsilon_1 dW(t)\right] \\
dQ_2(t) &= Q_2\left[\left(r(t) - r_2(t)\right)dt + \upsilon_2 dW(t)\right]
\end{aligned}
$$

Le taux court terme danois et les taux de change ne sont évidemment pas modifiés puisqu'ils sont déjà exprimés sous la mesure de référence. Par contre, on remarque que le drift des indices et des autres taux court terme sont réduits d'un terme égal au produit des termes de diffusion de ces indices ou taux et de ceux des taux de change correspondant.

b) Preuve de l'absence d'opportunités d'arbitrage.

Nous allons montrer que ces propositions nous permettent bien de construire un modèle de marché sans arbitrage. Pour ce faire, nous allons montrer que tous les actifs, indices et obligations, exprimés en couronnes danoises et actualisés au taux danois sont martingales sous la mesure de référence. Autrement dit, on doit montrer que $\dfrac{Q_i(t) * Z_i(t)}{B(t)}$ est martingale pour tout i.

Pour cela, il suffit de montrer que le drift des processus $d\left(Q_i(t) * Z_i(t)\right)$ est égale à r(t).

Pour ce faire nous allons utiliser la version multivariée du lemme d'Ito qui nous permet de calculer $d\left(Q_i(t) * Z_i(t)\right)$.

On a alors :

$$
d\left(Q_1(t)Z_1(t)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1(t) & Q_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1(t)\left(r(t) - r_1(t)\right) \\ Z_1(t)\left(r_1(t) - \upsilon_1\varepsilon_1^T\right) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} tr\left[\begin{pmatrix} Q_1(t)\upsilon_1^T & Z_1(t)\varepsilon_1^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1(t)\upsilon_1 \\ Z_1(t)\varepsilon_1 \end{pmatrix} \right] \right\} dt
$$

$$
+ \begin{pmatrix} Z_1(t) & Q_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1(t)\upsilon_1 \\ Z_1(t)\varepsilon_1 \end{pmatrix} dW(t)
$$

$$
d\left(Q_1(t)Z_1(t)\right) = \left(Z_1(t)Q_1(t)\left(r(t) - r_1(t)\right) + Z_1(t)Q_1(t)\left(r_1(t) - \upsilon_1\varepsilon_1^T\right) + \frac{1}{2} tr[\ldots] \right) dt + \left(\upsilon_1 + \varepsilon_1\right) Z_1(t)Q_1(t)dW(t)
$$

La trace de la matrice est égale à :

$$\frac{1}{2}tr\left[\begin{pmatrix}Q_1(t)\upsilon_1^T & Z_1(t)\varepsilon_1^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1(t)\upsilon_1\\ Z_1(t)\varepsilon_1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}tr\left[\begin{pmatrix}Q_1(t)\upsilon_1^T & Z_1(t)\varepsilon_1^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1(t)\upsilon_1\\ Z_1(t)\varepsilon_1\end{pmatrix}\right]$$

$$=tr\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}Q_1(t)\upsilon_{11} & Z_1(t)\varepsilon_{11}\\ Q_1(t)\upsilon_{12} & Z_1(t)\varepsilon_{12}\\ \dots & \dots\\ Q_1(t)\upsilon_{17} & Z_1(t)\varepsilon_{17}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1(t)\varepsilon_{11} & Z_1(t)\varepsilon_{12} & \dots & Z_1(t)\varepsilon_{17}\\ Q_1(t)\upsilon_{11} & Q_1(t)\upsilon_{12} & \dots & Q_1(t)\upsilon_{17}\end{pmatrix}\right]$$

$$=tr\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2*Z_1(t)Q_1(t)\upsilon_{11}\varepsilon_{11} & \dots & \dots & \dots\\ \dots & 2*Z_1(t)Q_1(t)\upsilon_{12}\varepsilon_{12} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & 2*Z_1(t)Q_1(t)\upsilon_{17}\varepsilon_{17}\end{pmatrix}\right]$$

$$=Z_1(t)Q_1(t)\upsilon_1^T\varepsilon_1$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned}d\left(Z_1(t)Q_1(t)\right)&=\left(Z_1(t)Q_1(t)\left(r(t)-r_1(t)\right)+Z_1(t)Q_1(t)\left(r_1(t)-\upsilon_1^T\varepsilon_1\right)+Z_1(t)Q_1(t)\upsilon_1^T\varepsilon_1\right)dt\\ &\quad+Z_1(t)Q_1(t)\left(\upsilon_1+\varepsilon_1\right)dW(t)\\ &=Z_1(t)Q_1(t)\left(r(t)dt+\left(\upsilon_1+\varepsilon_1\right)dW(t)\right)\end{aligned}$$

cqfd.

Nous pouvons faire de même pour Z_2.

Nous obtenons donc bien le résultat espéré à savoir que les prix exprimés en couronnes danoises croissent à un taux r(t). Pour vraiment démontrer que nous avons bien construit un modèle de marché sans arbitrage, il faudrait démontrer que tout prix d'actif exprimé dans une certaine devise et actualisé au taux sans risque de cette devise est une martingale. Nous nous limitons ici au cas danois.

3. Evaluation du traité Stop Loss financier.

Nous avons maintenant tous les outils en main pour calculer le prix du traité Stop loss. Pour rappel, grâce au principe de l'évaluation risque neutre, le prix de tout actif atteignable X versant un payoff X(T) en T est donné par la formule :

$$X(t) = E^Q\left[X(T)e^{-\int_{u=t}^{T} r(u)du} \middle| \Im_t \right]$$

Pour notre traité stop Loss, nous avons donc le prix d'arbitrage suivant :

$$P(tc) = E^Q\left\{ \min\left[75M;\max\left[0, P * \begin{bmatrix} LR \\ +0.00105*\left(Z_1(td) - Z_1(tf)\right) \\ +0.000106*\left(Z_2(td) - Z_2(tf)\right) \\ +0.005*\left(IB(td) - IB(tf)\right) \end{bmatrix} - \max\left[p*0.84;895M\right] \right]\right] * e^{-\int_{u=tc}^{tf} r(u)du} \middle| \Im_{tc} \right\}$$

où tc correspond à la date de conclusion du contrat.

td correspond à la date de début du contrat.

tf correspond à la date de fin du contrat.

IB(u) est le prix de l'obligation couponnée c'est à dire à la somme des prix des zéro coupons encore à payer à la date u. Notons que le nombre de zéro coupons composant l'obligation, peut différer selon la date à laquelle on se situe. Ce nombre peut être différent selon que l'on se situe en tc, td ou tf.

Nous supposerons que le ratio S/P suit une distribution log normale.

Cette formule générale est valable quel que soit le modèle considéré (devise(s) unique / multiples). Bien entendu, selon le modèle considéré, les processus suivis par les prix des indices et des taux d'intérêt seront différents sous la mesure Q.

Notons que nous pourrions écrire cette formule sous la mesure forward neutre, ce qui nous permettrait d'éliminer de la formule le terme d'actualisation. Cependant, vu les spécificités de ce produit, ce passage de la mesure risque neutre à la mesure forward neutre ne simplifie pas le calcul explicite de l'espérance ni l'utilisation d'une méthode numérique de résolution. C'est pourquoi, nous resterons sous la mesure risque neutre qui est, nous semble t-il, plus intuitive.

Partie 3.

Estimation des paramètres.

La particularité de la finance moderne, en ce qui concerne l'estimation des paramètres, réside dans le fait que seul les paramètres liés à la mesure risque neutre sont d'intérêt pour l'évaluation. L'estimation implicite des paramètres à partir des prix observés sur les marchés, est alors souvent préférée à une étude économétrique. C'est notamment le cas pour l'estimation des paramètres du processus du taux court terme r(t). Nous en reparlerons plus en détail par la suite.

1. Modèle à devise unique

Les paramètres à identifier sont les suivants:

Pour les indices Z1 et Z2: $\begin{matrix} (\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}) \\ (\sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}) \end{matrix}$

Pour le taux d'intérêt: a, b et $(\sigma_{r1} \quad \sigma_{r2} \quad \sigma_{r3})$.

Il est important de comprendre qu'il n'est pas possible de déterminer directement les valeurs des différents sigmas. De plus, ces paramètres n'ont d'intérêt qu'à travers la structure de variances covariances qu'ils forment. C'est en fait cette structure de variance covariance des processus que nous allons estimer. Par la suite, nous décomposerons celle-ci afin de retrouver les sigmas.

Pour résumer, nous allons donc essayer d'estimer, outre a et b, la matrice suivante :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} |\sigma_1|^2 & \sigma_1\sigma_2^T & \sigma_1\sigma_r^T \\ \sigma_1\sigma_2^T & |\sigma_2|^2 & \sigma_2\sigma_r^T \\ \sigma_1\sigma_r^T & \sigma_2\sigma_r^T & |\sigma_r|^2 \end{pmatrix}$$

On pourra alors dans deuxième étape, réaliser une décomposition de Cholesky c'est à dire rechercher la matrice diagonale A telle que $A * A^T = \Sigma$ .Cette matrice A est alors composée de sigmas cohérents avec la structure de variances covariances. Cette représentation sous forme de sigmas est utilisée pour la simple raison qu'elle est particulièrement commode dans la mise en oeuvre de la méthode de Monte-Carlo où il suffira de générer 3 bruits blancs pour simuler les chemins suivis par les différents actifs.

a) Estimation des paramètres liés aux indices.

Nous pouvons aisément déterminer les paramètres liés aux indices à partir des séries temporelles de prix de ces mêmes actifs. En effet, on peut facilement démontrer que le logarithme du rapport des prix suit une distribution normale. Nous pouvons utiliser n'importe quelle technique classique pour estimer la variance de cette distribution. Nous pouvons par exemple utiliser les estimateurs de maximum de vraisemblance. Pour les indices, nous avons :

$$\ln\left(\frac{Z_1(T)}{Z_1(t)}\right) = \left(\mu_1 - \frac{1}{2}|\sigma_1|^2\right)(T-t) + \sigma_1\big(W(T) - W(t)\big)$$

Ce logarithme est une normale dont la variance est : $|\sigma_1|^2 (T-t)$.

Par maximum de vraisemblance, on obtient comme estimateur :

$$|\hat{\sigma}_1|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\ln\left(\frac{Z_{t_i+1}}{Z_{t_i}}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\frac{Z_{t_i+1}}{Z_{t_i}}\right)\right)^2$$

On peut évidemment faire de même pour Z_2.

On peut également calculer l'estimateur de la covariance entre Z1 et Z2. On a alors :

$$\sigma_1\sigma_2^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\ln\left(\frac{Z_{1t_1+1}}{Z_{1t_1}}\right) * \ln\left(\frac{Z_{2t_i+1}}{Z_{2t_i}}\right)\right] - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\frac{Z_{1t_1+1}}{Z_{1t_1}}\right)\right] * \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\frac{Z_{2t_1+1}}{Z_{2t_1}}\right)\right]$$

Nous avons repris ci dessous les résultats d'une telle estimation pour la volatilité du SP500 selon différentes périodes d'observation.

SP 500	$\sqrt{\lvert\sigma_2\rvert^2}$
1950-2001	0.137395
1975-2001	0.154829
1980-2001	0.162235
1987-2001	0.171003
1990-2001	0.151198
1995-2001	0.172531
1998-2001	0.203398
2000-2001	0.221339

Les estimateurs sont en valeur annuelle et une année est supposée être constituée de 252 jours de trading.

Nous voyons que ces valeurs varient énormément selon la longueur de la période prise en considération. Cela semble indiquer que la volatilité des prix des indices s'est modifiée au cours du temps. Des périodes de volatilité plus importantes ont succédé à des périodes de volatilité plus calme et vice versa. Ceci nous indique que si nous basons notre estimation sur des données historiques, il faut choisir avec soin la période sur laquelle nous estimons nos paramètres. Cette période doit être la plus "proche" en terme de comportement (pas nécessairement en terme de temps) de celle sur laquelle nous voulons modéliser les prix. Nous avons pris les observations de la période 1998-2001 pour calculer nos estimateurs. Dans la dernière partie, nous verrons que les paramètres ayant le plus d'influence sur le prix du traité, semble être la volatilité des indices et que le prix suit une relation positive avec cette volatilité. La volatilité fut particulièrement importante durant la période 1998-2001, par conséquent, le prix du traité calculé sur base de ces estimateurs devrait être assez prudent. Nous avons choisi en outre cette période parce qu'elle nous semble, à la fois, suffisamment longue mais tout en restant suffisamment proche et donc représentative de la situation actuelle.

Nos estimateurs sont alors :

$\lvert\sigma_1\rvert^2$	$\lvert\sigma_2\rvert^2$	$\sigma_1\sigma_2^T$
0.036066	0.049262	0.019782

Les valeurs initiales des actifs à la date du 20 avril 2001 sont :

Euro Stoxx	S&P 500
333.21	1242.98

b) Estimation des paramètres liés au taux d'intérêt.

Les paramètres considérés ici sont $\lvert\sigma_r\rvert^2, \sigma_1\sigma_r^T, \sigma_2\sigma_r^T$ ainsi que a et b.

En ce qui concerne ces paramètres, les choses se corsent un peu. En général, l'estimation de ces paramètres ne passe pas par une par une étude des séries temporelles. Il y a deux raisons à cela. D'une part, nous désirons estimer les paramètres sous la mesure risque neutre. Selon la mesure sous laquelle nous nous situons, le paramètre b se modifie en relation avec la prime de risque du marché (inconnue). L'estimation sous la mesure réelle, c'est à dire avec les séries temporelles, ne nous permet pas d'estimer le b nécessaire mais un autre b qui inclut cette prime de risque. Si nous voulons en déduire le b qui nous intéresse, il est alors nécessaire d'estimer également la prime de risque, tâche extrêmement difficile. D'autre part, le r(t) est le taux d'intérêt instantané sans risque. Ce r(t) est plus un objet théorique qu'un taux réel. Si l'on veut réaliser des estimations sur séries temporelles, il faut d'abord choisir un taux qui approxime ce r(t). En conclusion, la méthode la plus indiquée consiste à estimer ces paramètres de manière implicite à partir de prix d'autres actifs observés sur le marché. C'est bien ce que nous allons faire pour les paramètres a et b.

Cependant, cette méthode pose des problèmes lorsqu'il s'agit d'estimer les paramètres $\sigma_i \sigma_r^T$. La meilleure méthode consisterait probablement à essayer également de déterminer ceux-ci de manière implicite à partir de prix d'options sur indices. En effet; dans le cas gaussien, le terme $\sigma_i \sigma_r^T$ intervient explicitement dans le prix théoriques de ces options. Cependant dans la réalité, le terme σ_r que l'on peut extraire des prix des options sur indices correspond au taux d'intérêt de la monnaie dans laquelle est exprimé l'indice, c'est à dire, dans le cas par exemple d'une option sur S&P 500, le taux américain et non le taux danois[2].

Faute de mieux, nous avons donc choisi d'estimer ces paramètres de covariance à partir des séries temporelles de taux court terme danois. Nous avons donc calculer les covariances des logarithmes des prix des indices et de ce taux court terme. Comme nous l'avons déjà expliqué, le taux court terme quel qu'il soit, est une approximation du taux théorique instantané. Les estimateurs de ces paramètres doivent donc être pris avec prudence.

[2] La seule possibilité serait d'utiliser des options sur indices mais exprimés dans des monnaies différentes. Ces options ne sont pas échangées sur un marché. Ce sont des OTC. On ne fait donc qu'estimer les valeurs des paramètres utilisés par la banque plutôt que des paramètres de marché.

Estimation de $|\sigma_r|^2$

Nous avons estimé les paramètres de variance du taux d'intérêt à partir d'une forme approchée du processus de diffusion. L'approximation est la suivante, nous l'utiliserons également dans la simulation de Monte Carlo :

$$r(t+\Delta t) - r(t) = a(b - r(t))\Delta t + \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ri} \sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_i$$

où ε_i sont des v.a. normales centrées réduites indépendantes. Cette approximation est correcte pour Δt petit.

On a donc : $\mathrm{var}\left(r(t+\Delta t) - r(t) \middle| r(t)\right) = |\sigma_r|^2 \Delta t$. En calculant la variance empirique, on trouve donc facilement un estimateur de $|\sigma_r|^2$.

On trouve

$\|\sigma_r\|^2$
-1.19516$^{\text{E-04}}$

Estimation des $\sigma_i \sigma_r^T$:

En reprenant cette même approximation, la covariance entre le taux d'intérêt et les indices peut s'approcher par la formule :

$$\mathrm{cov}\left(r(t+\Delta t) - r(t), \ln Z_i(t+\Delta t) - \ln Z_i(t) \middle| r(t), Z_i(t)\right) = \sigma_i \sigma_r^T \Delta t$$

On peut donc trouver les estimateurs par un calcul de covariance empirique classique. Nous trouvons alors les résultats suivants :

$\sigma_1 \sigma_r^T$	$\sigma_2 \sigma_r^T$
-1.19516$^{\text{E-04}}$	2.40087$^{\text{E-05}}$

Estimation implicite de a, b.

Avec un taux d'intérêt court terme instantané tel que nous l'avons spécifié, nous pouvons trouver une formule explicite des prix des 0-coupons. De là, nous pouvons facilement calculer la courbe des taux. Nous allons prendre comme paramètres a et b, les paramètres du modèle de vasicek qui nous donnent une courbe des taux théoriques qui “fitte” au mieux la courbe des taux observée.

Cependant, la courbe des taux 0 coupons est rarement observable directement, dû au manque de 0-coupons d'état. Pour contourner ce problème, on va extraire les taux 0-coupons du prix des obligations d'état couponnée. Ce n'est qu'une fois ces taux extraits que nous pourrons trouver les paramètres de Vasicek qui "fitte" au mieux la courbe observée et la courbe théorique[3]. Pour fitter, nous avons utilisé une méthode de moindre carrés c'est à dire que pour chaque date où nous avons pu extraire un taux 0 coupons, nous calculons le carré de la différence entre ce taux et le taux théorique. Nous calculons la somme de ces écarts et nous recherchons les paramètres qui minimisent cette somme. La courbe des taux théoriques de Vasicek est donnée par la formule suivante :

$$B(t,T) = \exp\left[-A(T-t) - B(T-t)r(t)\right]$$

$$B(T-t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

où $A(T-t) = \left(T - t - B(T-t)\right)b - 0.5v(T-t)$

$$v(T-t) = \frac{|\sigma_r|^2}{2a^3}\left(4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} + 2a(T-t) - 3\right)$$

Connaissant la valeur initiale de r, nous pouvons donc en déduire a et b. Notons que cette fois, le paramètre b est directement le paramètre du processus de Vasicek sous la mesure risque neutre. Notons que nous pourrions théoriquement estimer également $|\sigma_r|^2$ de la même manière. En fait, on peut observer qu'il existe une sorte de degré de liberté entre a et $|\sigma_r|^2$. Il est alors intéressant pour la minimisation de fixer l'un des paramètres. De plus, pour réaliser la décomposition de Cholsesky, la matrice de variances covariances doit être semi définie positive. Ceci exige une certaine «cohérence» entre $|\sigma_r|^2$ et $\sigma_i\sigma_r^T$. C'est pourquoi, nous avons préféré estimer au préalable $|\sigma_r|^2$ à partir des séries temporelles et réaliser la minimisation par moindres carrés avec cet estimateur comme valeur initiale.
A la date du 20 avril 2001, nous trouvons comme estimateur :

a	B	$\lvert\sigma_r\rvert^2$
0.7740461	0.046033	1.795675^{E-03}

Pour terminer, notons encore un dernier problème, l'estimation implicite de ces paramètres exigent la connaissance de la valeur du taux instantané r à la date

[3] En théorie, nous pourrions calculer une régression non linéaire directement sur le prix des obligations couponnées.

d'estimation. Comme nous l'avons déjà fait remarquer plusieurs fois, ce taux n'est pas observable puisqu'il est purement théorique. Nous pourrions prendre la valeur courante du taux court terme sur lequel nous réalisons nos estimations mais nous avons fait un autre choix. Nous avons fitté la courbe des taux extraite des prix des obligations couponnées par la courbe dite de Nelson-Siegel. Cette fonction est assez riche et permet de «fitter» avec une bonne précision un grand nombre de forme de courbe des taux. Cette courbe est donnée par la formule suivante :

$$Y(t) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

On peut alors en déduire le r initial qui est égal à $\lim_{t \longrightarrow 0} Y(t) = \beta_0 + \beta_1$

A la date du 20 avril 2001, nous obtenons les paramètres suivant :

β_0	0.0521251
β_1	-0.000643
β_2	-0.016901
τ_1	1.779526
τ_2	1.9000462

Le taux instantané initial r(t) est donc

r
0.0514821

Malheureusement, ce problème semble trop complexe pour SAS qui ne fournit pas de valeurs cohérentes des paramètres.

2. Modèle à devises multiples.

Nous devons ici estimer les paramètres de la matrice de variances covariances suivante :

$$\begin{pmatrix} |\sigma_1|^2 & \sigma_1\sigma_2^T & \sigma_1\sigma_r^T & \sigma_1\sigma_{r1}^T & \sigma_1\sigma_{r2}^T & \sigma_1\upsilon_1^T & \sigma_1\upsilon_2^T \\ \sigma_1\sigma_2^T & |\sigma_2|^2 & \sigma_2\sigma_r^T & \sigma_2\sigma_{r1}^T & \sigma_2\sigma_{r2}^T & \sigma_2\upsilon_1^T & \sigma_2\upsilon_2^T \\ \sigma_1\sigma_r^T & \sigma_2\sigma_r^T & |\sigma_r|^2 & \sigma_r\sigma_{r1}^T & \sigma_r\sigma_{r2}^T & \sigma_r\upsilon_1^T & \sigma_r\upsilon_2^T \\ \sigma_1\sigma_{r1}^T & \sigma_2\sigma_{r1}^T & \sigma_r\sigma_{r1}^T & |\sigma_{r1}|^2 & \sigma_{r1}\sigma_{r2}^T & \sigma_{r1}\upsilon_1^T & \sigma_{r1}\upsilon_2^T \\ \sigma_1\sigma_{r2}^T & \sigma_2\sigma_{r2}^T & \sigma_r\sigma_{r2}^T & \sigma_{r1}\sigma_{r2}^T & |\sigma_{r2}|^2 & \sigma_{r2}\upsilon_1^T & \sigma_{r2}\upsilon_2^T \\ \sigma_1\upsilon_1^T & \sigma_2\upsilon_1^T & \sigma_r\upsilon_1^T & \sigma_{r1}\upsilon_1^T & \sigma_{r2}\upsilon_1^T & |\upsilon_1|^2 & \upsilon_1\upsilon_2^T \\ \sigma_1\upsilon_2^T & \sigma_2\upsilon_2^T & \sigma_r\upsilon_2^T & \sigma_{r1}\upsilon_2^T & \sigma_{r2}\upsilon_2^T & \upsilon_1\upsilon_2^T & |\upsilon_2|^2 \end{pmatrix}$$

ainsi que les paramètres liés aux différentes courbes des taux : a et b pour la courbe danoise, a1 et b1 pour les taux européens, a2 et b2 pour les taux US.

L'estimation des paramètres n'est pas ici fondamentalement bouleversée.

En ce qui concerne la matrice de variances-covariances, nous avons estimé les paramètres à partir de séries temporelles de la même manière que celle décrite dans la section précédente. C'est à dire qu'en ce qui concerne les taux d'intérêt, nous avons calculé les estimateurs de la forme discrétisée des processus de diffusion. Pour les taux de change, nous avons estimé leurs volatilités à partir du logarithme du rapport des taux, tout comme nous le faisons pour la volatilité des indices.

Les estimateurs ainsi obtenus sont repris dans la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0.036066 & 0.019782 & -0.000119516 & -0.00011951 & 0.000111488 & -1.26099E-05 & 0.0075608 \\ 0.019782 & 0.049262 & 2.40087E-5 & 2.4008E-5 & 4.38958E-5 & 8.386776E-6 & 0.003054221 \\ -0.000119516 & 2.40087E-5 & 1.795674E-3 & 0.000180088 & -1.96329E-6 & -8.66497E-7 & -7.91856E-5 \\ -0.00011951 & 2.4008E-5 & 0.000180088 & 1.07063766E-3 & -1.9633E-06 & -8.6649E-7 & -7.9185E-5 \\ 0.000111488 & 4.38958E-5 & -1.96329E-6 & -1.9633E-06 & 1.1089965E-3 & -5.08947E-7 & 1.88837E-5 \\ -1.26099E-05 & 8.386776E-6 & -8.66497E-7 & -8.6649E-7 & -5.08947E-7 & 7.63695E-6 & -2.14957E-5 \\ 0.0075608 & 0.003054221 & -7.91856E-5 & -7.9185E-5 & 1.88837E-5 & -2.14957E-5 & 0.015587496 \end{pmatrix}$$

Par une décomposition de Cholesky, nous pourrons alors déterminer les sigmas des différents processus, compatibles avec cette structure de variances covariances.

Pour les paramètres des trois taux instantanés, nous avons extrait les trois courbes des taux à partir de prix d'obligations couponnées et par méthode des moindres carrés, nous avons estimé les paramètres a et b qui permettent de fitter au mieux les courbes observées.

$a =$	0.7740461
$b =$	0.046033
$a_1 =$	0.7678626
$b_1 =$	0.0493907
$a_2 =$	0.5952205
$b_2 =$	0.0578593

Notons que pour déterminer a_1 et b_1, les paramètres liés au taux instantané européen, nous avons utilisé le prix d'obligations allemandes.

Pour déterminer la valeur initiale du taux instantané, nous avons également utilisé la fonction de Nelson-Siegel.

On obtient alors :

Taux danois $r(t)$	0.0514821
Taux européen $r_1(t)$	0.0472976
Taux US $r_2(t)$	0.0346635

3 Estimation du Loss ratio.

L'estimation du loss ratio, nous a été fournie par la société Sécura. Nous supposons que le loss ratio suit une distribution log normale dont les paramètres sont :

μ	σ
-0.2655480	0.0679442

Partie 4.

Méthodes de Monte Carlo.

Pour rappel, la méthode de Monte Carlo vise à simuler un très grand nombre de fois la valeur prise par la variable aléatoire d'intérêt, ici le payoff actualisé, et d'en calculer la moyenne arithmétique. On obtient ainsi un estimateur de l'espérance de ce payoff actualisé.

Nous avons développé deux types de simulation de Monte-Carlo. Le premier type retrace l'entièreté des chemins suivis par les prix des actifs et ce pour chaque simulation. Il est, bien entendu, impossible de simuler ces chemins de manière continue. Cette technique requiert donc une certaine discrétisation des chemins suivis par ces prix. Nous avons opté pour un schéma de discrétisation d'Euler. Cette discrétisation est nécessairement une approximation du chemin continu et implique donc des "erreurs".

De plus, à temps de calcul fixé, nous devons dans ce modèle faire un «trade off» entre le pas de discrétisation et le nombre de simulation à réaliser. Nous verrons ce problème plus en détail par la suite.

Comme nous le verrons, cette méthode est particulièrement lourde en terme de temps de calcul. Ceci se révèle encore plus vrai pour le modèle en devise multiple. Cette durée extrêmement longue des temps de calcul, nous alors poussé à chercher une autre technique de simulation. Le deuxième type tente de simuler les prix des actifs uniquement aux deux dates d'intérêt, td et tf. Cette technique a un double avantage. D'une part, elle est infiniment plus rapide puisque pour chaque simulation, nous ne devons simuler les prix qu'à deux dates contre K dates dans le cas du modèle brut où K dépend de la taille du pas de discrétisation. D'autre part, aucune discrétisation n'intervient. Nous n'essayons pas d'approximer le chemin continu et il n'y a donc pas "d'erreur" de discrétisation.

1. Premier modèle : Monte-Carlo brute.

a) Le principe.

Nous avons opté, dans un premier temps, pour une simulation des prix aux différentes dates par une méthode d'approximation d'Euler. Cette méthode permet de calculer les prix successifs des différents actifs en générant trois v.a. normales standards indépendantes.

Formellement pour un instant Δt supposé "petit", nous approximons les processus de diffusion suivant

$$\begin{cases} dZ_1(t) = r(t) * Z_1(t) * dt + Z_1(t) * \sigma_1 * dW(t) \\ dZ_2(t) = r(t) * Z_2(t) * dt + Z_2(t) * \sigma_2 * dW(t) \\ dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma_r dW(t) \end{cases}$$

par les processus discrets :

$$\begin{cases} Z_1(t+\Delta t) - Z_1(t) = r(t) * Z_1(t) * \Delta t + Z_1(t) * \left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_{1i} * \sqrt{\Delta t} * \varepsilon_i \right) \\ Z_2(t+\Delta t) - Z_2(t) = r(t) * Z_2(t) * \Delta t + Z_2(t) * \left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_{2i} * \sqrt{\Delta t} * \varepsilon_i \right) \\ r(t+\Delta t) - r(t) = a(b - r(t))\Delta t + \left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ri} * \sqrt{\Delta t} * \varepsilon_i \right) \end{cases}$$

avec $b_i(t,T) = \frac{\sigma_{ri}}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$

$\varepsilon_i \;\; i = 1..3$ v.a. Normale iid.

Grâce à la discrétisation des processus de diffusion décrite ci-dessus, nous avons écrit un programme en language SAS qui nous permet de simuler un grand nombre de fois les chemins suivis par les différents actifs financiers. Nous pouvons ainsi connaître les valeurs prises par ces actifs aux deux dates d'intérêt. Cette méthode à l'avantage de tenir compte des corrélations complexes qui existent, non seulement entre les actifs à une date donnée mais également les corrélations entre les prix d'un même actif à différentes dates, en simulant simplement 3 v.a. normales indépendantes.

Notons que grâce au modèle de Vasicek, la valeur des obligations à la date t est déterminée par la seule connaissance de r(t). En simulant r(td) et r(tf), on peut donc calculer la valeur de l'obligation couponnée IB(td) et IB(tf).

Nous donnons ci-dessous une rapide explication de l'algorithme suivi.

1. Réaliser un grand nombre de simulations

   1.1 Simuler le chemin de chaque actif jusqu'à la date td

   - Générer 3 v.a.normales standards indépendantes.
   - Calcul de $Z_1(t+\Delta t)$, $Z_2(t+\Delta t)$ connaissant r(t) et les valeurs $Z_1(t)$, $Z_2(t)$.
   - On calcule l'intégrale de r(u) en sommant les différents r(t).
   - Calcul du nouveau $r(t+\Delta t)$ connaissant r(t).

   1.2 On garde en mémoire les valeurs à la date td des Z1(td), Z2(td), IB(td).

   1.3 Simuler le chemin de chaque actif jusqu'à tf connaissant les valeurs en td.

   - Générer 3 v.a.normales standards indépendantes.
   - Calcul de $Z_1(t+\Delta t)$, $Z_2(t+\Delta t)$ connaissant r(t) et les valeurs $Z_1(t)$, $Z_2(t)$
   - On calcule l'intégrale de r(u) en sommant les différents r(t).
   - Calcul du nouveau $r(t+\Delta t)$ connaissant r(t)

   1.4 On garde en mémoire les valeurs à la date tf des Z1(tf), Z2(tf), IB(tf).

   1.5 On génère le loss ratio.

   1.6 On calcule la valeur de la prestation pour cette simulation et on calcule sa valeur actualisée à l'aide de la somme des r(t).

   1.7 On somme les valeurs actualisées des prestations successives correspondant aux différentes simulations.

2. On divise cette somme par le nombre de simulations.

Notons que la valeur de l'obligation couponnée n'est pas égale au prix coté sur le marché. Ce dernier est coté hors coupon couru. Par conséquent, lorsque nous gardons en mémoire IB(td) et IB(tf), il faut réduire la valeur de l'obligation d'un montant égal aux coupons courus

b) Temps de calcul.

Cette méthode de Monte Carlo peut se révéler extrêmement exigeante en temps de calcul. En effet, rappelons-nous, que pour chaque simulation, nous réalisons K calcul de valeur des actifs avec K = $(tf - tc) * 365 * n$ où n est le nombre de pas sur un jour. De plus, pour chaque calcul de valeur des actifs, nous devons générer 3 variables normales dans le modèle à devise unique et 7 dans le modèle à devises multiples. Au total, nous avons NDS*K*3 (ou NDS*K*7) variables normales centrées à générer où NDS est le nombre de simulations. Si la période séparant la conclusion du traité et la fin du traité est de un an et demi (≈ 360+180 jours)et que nous calculons la valeur des actifs chaque jour, alors pour une simulation, nous avons (360+180)*3 = 540 variables à générer. Si on considère qu'un nombre de 10 000 simulations donne un résultat satisfaisant, nous avons donc au total 5 400 000 variables à générer. Le temps de calcul est alors extrêmement long. Notons que le nombre de variables normales à générer est une fonction linéaire du nombre de simulations et du nombre de pas considéré. Le temps de calcul sera donc également linéaire en ces termes.

2. Deuxième modèle : Monte-Carlo accélérée.

Vu la longueur des temps de calcul qu'exige cette méthode, nous avons dans un deuxième temps essayé de trouver une autre méthode plus rapide mais reposant également sur le principe de la simulation de Monte Carlo. Ceci nous a amené à tenter de simuler les valeurs des différents actifs sous la mesure risque neutre directement aux dates d'intérêt. Notre but est donc ici de simuler directement Z_1(td), Z_1(tf), Z_2(td), Z_2(tf), r(td) et r(tf) ainsi que $\int_{u=tc}^{tf} r(u)du$.

En résolvant les équations différentielles, nous trouvons les formules suivantes.

- Pour les indices :

$$
\begin{aligned}
&d\ln Z_1(t) = \left(r(t) - 0.5|\sigma_1|^2\right)dt + \sigma_1 dW(t) \\
&\Rightarrow \ln\frac{Z_1(td)}{Z_1(tc)} = \underbrace{\int_{u=tc}^{td} r(u)du}_{v.a.} - 0.5|\sigma_1|^2\left((td - tc)\right) + \underbrace{\int_{u=tc}^{td} \sigma_1 dW(u)}_{N_1}
\end{aligned}
$$

Nous voyons que Z_1(td) dépend en fait de deux termes aléatoires N_1 et l'intégrale sur r(u). Selon nos hypothèses, ces deux termes sont des v.a. normales. De même, pour Z_2, nous avons le même type de formule :

$$\ln\frac{Z_2(td)}{Z_2(tc)} = \underbrace{\int_{u=tc}^{td} r(u)du}_{v.a.} - 0.5|\sigma_2|^2(td-tc) + \underbrace{\int_{u=tc}^{td}\sigma_2 dW(u)}_{N_2}$$

où N_2 est également une v.a. normale et l'intégrale sur r(u) prend évidemment la même valeur que dans la première équation.

- Pour les taux d'intérêt, on a

$$r(td)\Big|\Im_{tc} = e^{-a(td-tc)}r(tc) + b\left(1-e^{-a*(td-tc)}\right) + \underbrace{e^{-atd}\int_{u=tc}^{td} e^{au}\sigma_r dW(u)}_{N_3}$$

On a donc 3 v.a. normales corrélées à simuler N1, N2, N3 ainsi que l'intégrale sur les taux d'intérêt qui suit également une v.a. normale. On peut déterminer sa distribution de la manière suivante :

$$\int_{u=tc}^{td} r(u)du\Big|\Im_{tc} = \int_{u=tc}^{td} e^{-a(u-tc)}r(tc)du + \int_{u=tc}^{td} b\left(1-e^{-a(u-tc)}\right)du + \underbrace{\int_{u=tc}^{td}\sigma_r e^{-au}\int_{x=tc}^{u} e^{ax}dW(x)du}_{N_4}$$

Nous voyons que cette intégrale dépend en fait d'une seule variable aléatoire N_4. On peut simplifier cette équation :

$$\begin{aligned}\int_{u=tc}^{td} r(u)du\Big|\Im_{tc} &= \frac{r(tc)}{a}\left[1-e^{-a(td-tc)}\right] + b(td-tc) - \frac{b}{a}\left[1-e^{-a(td-tc)}\right] + \int_{u=tc}^{td}\int_{x=tc}^{u}\sigma_r e^{-au}e^{-ax}dW(x)du \\ &= \frac{1}{a}\left[r(tc)-b\right]\left[1-e^{-a(td-tc)}\right] + b(td-tc) + \int_{x=tc}^{td}\int_{u=x}^{td}\sigma_r e^{-au}e^{ax}dudW(x) \\ &= \frac{1}{a}\left[r(tc)-b\right]\left[1-e^{-a(td-tc)}\right] + b(td-tc) + \underbrace{\int_{x=tc}^{td}\frac{\sigma_r}{a}\left[1-e^{-a(td-x)}\right]dW(x)}_{N_4}\end{aligned}$$

En bref, nous voyons que tous les prix des actifs sont en fait fonction des variables aléatoires normales N_1, N_2, N_3 et N_4 Pour simuler les prix de ces actifs, il suffit donc de simuler un tirage de ces 4 v.a. normales corrélées Nous devons au préalable calculer la matrice de variance covariance[4]. Ces calculs étant très fastidieux, nous ne reprendrons que les résultats finaux. Une fois cette matrice de variances covariances connue, nous

[4] Remarquons que ce sont ces variables sont toutes de moyennes nulles.

pourrons, à l'aide d'une décomposition de Cholesky, simuler ces variables normales à partir de simulations de variables aléatoires indépendantes.
Les variances et covariances de ces 4 v.a. sont reprises ci dessous :

$$Var(N_1) = |\sigma_1|^2 (t-s)$$

$$Var(N_2) = |\sigma_2|^2 (t-s)$$

$$Var(N_3) = \frac{|\sigma_r|^2}{2a}\left[1 - e^{-2a(t-s)}\right]$$

$$Var(N_4) = \frac{|\sigma_r|^2}{a^2}\left[t - s + \frac{0.5}{a}\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right) - \frac{2}{a}\left(1 - e^{-a(t-s)}\right)\right]$$

$$Cov(N_1;N_2) = \sigma_1\sigma_2^T (t-s)$$

$$Cov(N_1;N_3) = \frac{\sigma_1\sigma_r^T}{a}\left(1 - e^{-a(t-s)}\right)$$

$$Cov(N_1;N_4) = \frac{\sigma_1\sigma_r^T}{a}\left[t - s - \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(t-s)}\right)\right]$$

$$Cov(N_2;N_3) = \frac{\sigma_2\sigma_r^T}{a}\left(1 - e^{-a(t-s)}\right)$$

$$Cov(N_2;N_4) = \frac{\sigma_2\sigma_r^T}{a}\left[t - s - \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(t-s)}\right)\right]$$

$$Cov(N_3;N_4) = \frac{|\sigma_r|^2}{a^2}\left[\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) - 0.5\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right)\right]$$

où t et s correspondent selon les cas à td et tc ou à tf et td.
Lorsque nous simulerons les valeurs de la date td à la date tf, nous utiliserons les mêmes formules mais où les valeurs liées à la date tc dans ces équations seront remplacées par celles simulées jusqu'à la date td. Par exemple, pour simuler l'intégrale de r(u) de td à tf, nous utiliserons comme valeur de r initiale dans la formule ci-dessus la valeur simulée de r(td).
En utilisant une décomposition de Cholesky sur cette matrice de variances-covariances, nous obtenons alors matrice qui multipliée par un vecteur de quatre normales centrées réduites indépendantes, nous permet de simuler les 4 v.a. corrélées. En reprenant les équations décrites ci-dessus, on peut alors calculer les valeurs des actifs aux différentes dates.

Notons que nous n'avons développé cette technique que pour le modèle à devise unique. L'application au modèle à devises multiples peut également se faire mais est un peu plus fastidieuse.

3. Comparaison des deux simulations de Monte Carlo.

La deuxième technique à l'avantage d'être infiniment plus rapide que la première puisque nous ne simulons les valeurs des actifs qu'aux dates d'intérêt. De plus, aucune erreur de discrétisation n'est commise puisque nous simulons leurs valeurs à partir de leurs distributions réelles. Cette technique est donc supérieure à tout point de vue dans le cas étudié ici. Cependant cette technique n'est valable que si les distributions des processus de diffusion sont connues, ce qui est rarement le cas. La première technique au contraire peut très facilement être adaptée pour d'autres types de processus. Par exemple, nous aurions pu facilement prendre le modèle de Cox, Ingersoll et Ross pour le taux d'intérêt. Même dans ce cas, il suffit de simuler des v.a. normales indépendantes. Cette première méthode est donc plus générale que la deuxième et nettement plus simple. La deuxième technique n'est réellement utilisable que dans le cas d'un marché gaussien.

Partie 5.

Résultats et Conclusions.

1. Le prix du traité.

Il ne nous reste plus qu'à fixer les dates tc, td et tf pour pouvoir calculer le prix de notre traité. Nous avons considéré que la prime du traité était calculée et versée à la date du 20 avril 2001 (=tc). Le traité commence à la date du 1er janvier 2002 (=td) et se termine le 31 décembre 2002 (=tf). La formule d'évaluation suppose que la société de réassurance paye les prestations dues à cette dernière date. La valeur de P est 1 079 000 000 DK.

a) Comparaison Monte Carlo brute / Monte Carlo accélérée

Nous avons réalisé cette comparaison au niveau du modèle à devise unique.
Pour rappel, nous avons les estimateurs suivants :

$\lvert\sigma_1\rvert^2$	$\lvert\sigma_2\rvert^2$	$\sigma_1\sigma_2^T$	a	B	$\lvert\sigma_r\rvert^2$	$\sigma_1\sigma_r^T$	$\sigma_2\sigma_r^T$
0.036066	0.049262	0.019782	0.7740461	0.046033	0.00179567	-1.19516E -04	2.40087E -05

- **Monte-Carlo accélérée :**

Pour de telles valeurs de paramètres, le modèle accéléré calculé avec **100 000 simulations** nous donne une prime d'environ :

8 400 000 DK

Le temps de calcul est d'environ **22 minutes**. Rappelons que le temps de calcul est linéaire avec le nombre de simulations. Pour 10 000 simulations, le temps se réduit à environ 2 minutes.

- **Monte-Carlo brute :**

Nous avons calculé le prix du traité pour différentes valeurs du pas de discrétisation. Pour 2000 simulations, nous obtenons les résultats :

n	Prix du traité
0.03	4 510 274
0.06	4 787 130
0.10	9 258 340
0.2	8 095 030
0.5	8 732 384

Le dernier résultat a demandé 54 minutes de calcul.

Pour **10 000 simulations** et **n=0.2**, on obtient :

8 150 000 DK

Conclusions :

Lorsque n est faible, les erreurs peuvent être extrêmement importantes mais lorsque nous réduisons nos approximations (n=0.2, 0.5 ou 1), les résultats ont l'air de tendre vers le résultat obtenu avec Monte-Carlo accéléré. Donc plus nous affinons la discrétisation, plus les résultats tendent vers ceux de la méthode accélérée. C'est bien ce à quoi nous nous attendions. Pour n faible, il semble que la simulation ait tendance à sous estimer la prime. Il est donc essentiel de choisir un n suffisamment grand.

On remarque enfin que les temps de calcul sont comme on pouvait l'attendre infiniment plus grand avec la méthode brute qu'avec la méthode accélérée. Pour n=0.5 et un nombre de simulations 50 fois moindre, la méthode brute exige quasiment 2.5 fois plus de temps de calcul.

b) Comparaison Modèle à devise unique / devises multiples.

Pour **n = 0.5** et **10 000 simulations**, nous obtenons comme prime :

8 461 863 DK

Temps de calcul : **4 heures 22 minutes.**

Pour rappel, dans le cas du modèle à devise unique, nous avions obtenu des résultats très similaires.

Conclusion :

Il semblerait que l'hypothèse simplificatrice du modèle à devise unique donne des résultats similaires au modèle à devises multiples pour les valeurs des paramètres considérées ici.

2. Effets des paramètres sur le prix du traité.

Nous allons maintenant tester les différents effets des paramètres de ce modèle sur le prix du traité. Pour réaliser ces calculs, nous nous sommes basés sur le modèle à devise unique avec 10 000 simulations (avec Monte-Carlo accélérée).

- **Effet de la volatilité de l'Euro Stoxx** $\sqrt{|\sigma_1|^2}$

Nous avons calculé le prix du traité pour différentes valeurs de ce paramètre et en considérant 10000 simulations. Les résultats sont repris dans le tableau suivant :

$\sqrt{\lvert\sigma_1\rvert^2}$	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22
Prix	6.486.293	7.278.569	7.924.090	8.511.157	9.310.662

A la lumière de ce tableau, on voit clairement une relation positive entre le prix du traité et la volatilité de l'indice 1. Notre choix d'une estimation des paramètres sur une période particulièrement volatile se justifie donc bien ici.

- **Effet de la volatilité de S&P 500** $\sqrt{|\sigma_2|^2}$ **:**

0.14	0.16	0.18	0.20	0.22
7.947.404	8.058.904	8.014.186	8.561248	8.417.756

L'effet de ce paramètre semble également positif mais est moins net que le premier. Ceci est dû à la moindre importance de l'indice Z_2 dans le payoff. Pour rappel, au début de ce rapport, nous avons montré que cet actif représentait environ 13% du portefeuille contre 35% pour le premier indice[5].

[5] Notons que ces pourcentages sont calculés avec des valeurs initiales des actifs différentes de celles utilisées réellement. Les proportions réelles sont donc certainement différentes bien que l'ordre de grandeur soit probablement semblable.

- **Effet de la corrélation instantanée entre Z_1 et Z_2.**

La corrélation instantanée entre ln Z_1 et ln Z_2 est donnée par $\frac{\sigma_1\sigma_2^T}{\sqrt{|\sigma_1|^2}\sqrt{|\sigma_2|^2}}$

-0.9	-0.75	-0.6	-0.45	-0.30	-0.15	0
3.383.905	4.225.944	4.841.683	5.021.949	5.468.326	6.374.409	7.188.257

0.15	0.30	0.45	0.6	0.75	0.9
7.404.416	7.850.717	8.392.415	8.594.026	9.139.067	9.904.363

Nous voyons que cette corrélation est très importante et que la valeur du traité évolue positivement avec cette corrélation.

- **Effet de la corrélation instantanée entre ln Z_1 et r :**

Cette corrélation instantanée est donnée par : $\frac{\sigma_1\sigma_r^T}{\sqrt{|\sigma_1|^2}\sqrt{|\sigma_r|^2}}$

0	0.15	0.3	0.45	0.6	0.75
8.903.226	8.371.477	8.046.538	7.564.518	8.084.795	7.223.676

On voit que le prix du traité évolue négativement avec le niveau de corrélation. Puisque les taux d'intérêt évoluent en sens inverse avec la valeur des obligations, ces résultats traduisent donc que la valeur du traité évolue positivement avec la corrélation entre cet indice et le prix de l'obligation couponnée.

- **Effet de la corrélation instantanée entre ln Z_2 et r.**

Cette corrélation est donnée par $\frac{\sigma_2\sigma_r^T}{\sqrt{|\sigma_2|^2}\sqrt{|\sigma_r|^2}}$

0	0.15	0.3	0.45	0.6	0.75
7.926.478	8.208.797	7.980.458	7.900.999	7.608.875	7.680.671

L'effet est identique que dans le premier cas mais semble plus limité.

3. Calcul du prix d'autres traités.

Stop Loss classique sans composante financière.

Nous trouvons une prime d'environ 2 500 000 DK.

Stop loss asymétriques.

- Le loss ratio n'est modifié qu'en cas de baisse de la valeur du portefeuille financier sur l'année considérée : prime = 9 500 000 DK.
- Le loss ratio n'est modifié qu'en cas de hausse de la valeur du portefeuille financier sur l'année considérée : prime = 1 300 000 DK.

Conclusion finale.

- D’après les résultats obtenus ci-dessus, il semblerait que le modèle à devise unique, bien que moins justifié théoriquement que le modèle à devises multiples, donne des résultats similaires à ce dernier modèle. Une étude plus approfondie est malgré tout nécessaire pour vérifier que c’est bien le cas pour d’autres valeurs des paramètres.
- L’utilisation de la méthode de Monte Carlo accélérée permet de réduire grandement les temps calculs. Cependant, cette technique est réservée à un plus petit ensemble de modèle.
- Le choix semble donc se porter vers un modèle à devise unique pour la tarification et le prix proposé est d’environ 8 400 000 DK. Les paramètres ont été calculés sur des périodes de grande volatilité, la prime ainsi déterminée est donc assez conservatrice.
- On peut également proposer de majorer cette prime d’un certain montant de manière à tenir compte du fait que les réassureurs ne sont pas réellement neutre au risque lié à la sinistralité de la compagnie comme nous l’avons supposé.
- Enfin, l’hypothèse d’atteignabilité du payoff et donc de la complétude du marché de la réassurance reste en suspens. N’ayant pas une connaissance « en temps réel » de l’évolution de la sinistralité de la compagnie d’assurance et en l’absence d’instruments financiers échangés sur le marché qui soient liés à la même source de risque que la sinistralité de la cédante[6], la couverture parfaite et par là, l’utilisation même du principe d’évaluation risque neutre, restent discutables. En l’absence d’une alternative théorique mieux justifiée, nous postulons que ce principe reste applicable pour le traité étudié ici.

[6] Si la société est cotée, il est peut être possible de considérer que les actions de la cédante correspondent à ce type d’instruments.

Table des matières.